MARIJANE DE SOUZA

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

FLORIANÓPOLIS

2006

MARIJANE DE SOUZA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TRABALHO DE CONCLUSÃO APRESENTADO AO CURSO DE MATEMATICA-HABILITAÇÃO EM LICENCIATURA DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA.

ORIENTADOR: MARCIO RODOLFO FERNANDES

FLORIANÓPOLIS
2006

Esta Monografia Foi Julgada Adequada Como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** No Curso De Matemática-Habilitação Licenciatura, e Aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora Designada pela Portaria n^0 12 CCM/ 06

Prof^A Carmen Suzane Comitre Gimenez

Professora Da Disciplina

Banca Examinadora:

Marcio Rodolfo Fernandes

Orientador

Nereu Estanislau Burim

Aldrovando Luiz Azevedo Araújo

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Marcio Rodolfo Fernandes
Pelo trabalho realizado e pela paciência ao Eduardo Vieira
Da Silva pela sua compreensão, Também á Francieli
Samestraro pela sua ajuda e apoio. Aos meus pais
Que são responsáveis por estar aqui.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitos dos problemas significativos e importantes da engenharia, das ciências físicas e das ciências sociais, quando formulados matematicamente, requerem a determinação de uma função que satisfaça uma equação contendo derivadas da função incógnita. Tais equações são denominadas equações diferenciais . Talvez o exemplo mais familiar seja a lei de Newton $m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right]$, para a posição $u(t)$ de uma partícula, sobre a qual atua uma força F , que pode ser função do tempo t , da posição $u(t)$ e da velocidade $\frac{du(t)}{dt}$. Para determinar o movimento de uma partícula, sobre a qual atua uma força dada F, é necessário encontrar a função *u* que satisfaça a equação $m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right]$. Se a força é devida à gravidade, então $m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -mg.$ Integrando, temos $\frac{du(t)}{dt} = -gt + c_1, u(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$, onde c_1 e c_2 são constante. Para determinar completamente $u(t)$, é necessário especificar duas condições adicionais, tais como a posição e velocidade da partícula em algum instante de tempo. Estas condições podem ser utilizadas para determinação das constantes c_1 e c_2.

É útil classificar os diferentes tipos de equações para um desenvolvimento sistemático da teoria das equações diferenciais. Uma das classificações mais óbvias baseia-se no fato de que a função incógnita depende de uma variável independente ou de várias variáveis independentes. No primeiro caso , apenas derivadas ordinárias estarão presentes na equação diferencial, que é dita equação diferencial ordinária. No segundo caso, as derivadas são parciais e a equação é chamada uma equação diferencial parcial. Exemplos típicos de equações diferenciais parciais são: a equação de potencial

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0,$$

a equação de difusão ou de calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

e a equação da onda

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Aqui α^2 e a^2 são constantes determinadas. A equação de potencial, a equação de difusão e a equação de onda aparecem numa variedade de problemas nos campos da eletricidade, magnetismo, elasticidade e mecânica dos fluidos. Cada uma é característica de um fenômeno físico distinto , e cada qual representa uma vasta classe de equações diferenciais parciais.
A principal razão para se resolver muitas equações diferenciais é tentar aprender alguma coisa sobre o processo físico subjacente que, acredita-se, a equação modela. Uma das razões básicas da importância das equações diferenciais é que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como o crescimento e decaimento exponenciais, os sistemas massa-mola ou os circuitos elétricos. A compreensão de um processo natural complexo é obtida, em geral, através da compreensão, ou construção, de modelos mais simples e básicos. Assim, um conhecimento profundo desses modelos, das equações que os descrevem e suas soluções é o primeiro passo indispensável na direção da solução de problemas mais complexo e realistas.

Problemas mais difíceis precisam, em geral, de uma variedade de ferramentas, tanto analíticas quanto numéricas. Resultados qualitativos e gráficos produzidos, muitas vezes, por computador , servem para ilustrar e clarificar conclusões que podem ficar obscurecidas por expressões analíticas complicadas. Por outro lado, a implementação de um procedimento numérico eficiente se apóia , tipicamente, em uma boa dose de análise preliminar. Para determinar as características qualitativas da solução como um guia para os cálculos, para investigar casos limites ou especiais, ou para descobrir os intervalos de valores onde as variáveis ou parâmetros podem precisar, ou merecer, atenção especial.

Um estudante deve compreender, portanto, que a investigação de um problema difícil pode necessitar tanto de análise, quanto de computação; que pode ser necessário bom senso para se determinar qual a ferramenta mais bem adaptada para uma tarefa particular; e que resultados podem ser apresentados, muitas vezes, de diversas formas.

Neste trabalho, apresentamos uma primeira visão das equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, bem como de alguns modelos matemáticos por elas representados.

CAPÍTULO 1: TERMINOLOGIA BÁSICA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED). Equações diferenciais são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

Classificação pelo tipo:

Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária(EDO).

Por exemplo,

$$\frac{dx}{dy} - 5y = 1$$

$$(x - y)dx + 4x\,dy = 0$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx} = x$$

são equações diferenciais ordinárias. Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial** (EDP).

Por exemplo:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{\partial \mu}{\partial \mu}$$

$$x\frac{\partial \mu}{\partial x} + y\frac{\partial \mu}{\partial y} = u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

são equações diferenciais parciais.

Classificação pela Ordem

A ordem de derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a **ordem da equação**.

Por exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (ou de ordem dois).
Como a equação diferencial (*y – x) dx + 4x dy = 0* pode ser escrita na forma

$$4x\frac{dy}{dx} + y = x$$

dividindo-se pela diferencial *dx*, trata-se então de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. A equação

$$a^2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

é uma equação diferencial parcial de quarta ordem.

Embora as equações diferenciais parciais sejam muito importantes, seu estudo demanda um bom conhecimento da teoria de equações diferenciais ordinárias. Portanto, na discussão que se segue, limitaremos nossa atenção às equações diferenciais ordinárias.

Uma equação diferencial ordinária geral de *n*-ésima ordem é freqüentemente representada pelo simbolismo

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\dots,\frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \qquad (1)$$

O que vem a seguir é um caso especial de (1).

Classificação como Linear ou Não-Linear

Uma equação diferencial é chamada de **linear** quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo *y* é 1.
(ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Uma equação que não é linear é chamada de **não-linear.**
As equações

$$xdy + ydx = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

e $$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

são equações diferenciais ordinárias lineares de primeira, segunda e terceira ordens, respectivamente. Por outro lado,

coeficiente depende de y

$$yy'' - 2y' = x$$

e

potencia $\neq 1$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0,$$

são equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda e terceira ordens, respectivamente.

Qualquer função f definida em algum intervalo *I*, que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de **solução** para a equação no intervalo.

Em outras palavras, uma solução para uma equação diferencial ordinária $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ é uma é função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação: isto é, $F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$, para todo x no intervalo *I*. Propositadamente, deixamos vaga a forma precisa do intervalo *I*. Dependendo do contexto da discussão, *I* pode representar um intervalo aberto (a,b), um intervalo fechado [a,b], um intervalo infinito (0,∞) e assim por diante.

Exemplo:

Verifique que y $=\frac{x^4}{16}$ é uma solução para a equação não-linear $\frac{dy}{dx}=xy^{\frac{1}{2}}$ no intervalo $(-\infty,\infty)$.

Solução: uma maneira de comprovar se uma dada função é uma solução é escrever a equação diferencial como $\frac{dy}{dx}-xy^{\frac{1}{2}}=0$ e verificar, após substituição, se a equação acima é verdadeira para todo x no intervalo. Usando $\frac{dy}{dx}=4\frac{x^3}{16}=\frac{x^3}{4} ey^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{x^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{4}$, *percebemos* que $\frac{dy}{dx}=xy^{\frac{1}{2}}=\frac{x^3}{4}-x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{4}=0$ para todo número real.

Soluções explicítas e implícitas

Soluções de equações diferenciais são divididas em implícitas ou explícitas. Uma solução para a equação diferencial ordinária (1) que pode ser escrita na forma y=f(x) é chamada de **solução explícita**. Dizemos que uma relação $G(x,y)=0$ é uma **solução implícita** de uma equação diferencial ordinária.

Exemplo:

Para –2 < x < 2,a relação $x^2+y^2-4=0$ é uma solução implícita para a equação diferencial

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

Segue, por derivação implícita, que $\frac{dy}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(y^2\right)-\frac{d}{dx}(4)=0$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \text{ ou } \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

A relação $x^2+y^2-4=0$ no exemplo define duas funções explícitas: $y=\sqrt{4-x^2}$ e $y=-\sqrt{4-x^2}$ no intervalo (-2,2). Além disso, note que qualquer relação da forma $x^2+y^2-c=0$ satisfaz formalmente, $\frac{dx}{dx}=-\frac{x}{y}$ para qualquer constante c. Porém, fica subentendido que a relação deve sempre fazer sentido no sistema dos números reais; logo, não podemos dizer que $x^2 + y^2 + 1 = 0$ determina uma solução da equação diferencial.

Número de soluções

Uma dada equação diferencial geralmente possui um número infinito de soluções. Por substituição direta, podemos verificar que qualquer curva, isto é , função, família a um parâmetro $y = ce^{x^2}$, em que c é uma constante arbitrária é solução de $\frac{dy}{dx} = 2xy.$
A solução trivial é um membro dessa família de soluções, correspondente a c=0.

Exemplo:

Para qualquer valor de c, a função $y = \frac{c}{x} + 1$ é uma solução da equação diferencial de primeira ordem $x\frac{dy}{dx} + y = 1$ no intervalo $(0, \infty)$.

Temos $\frac{dy}{dx} = c\frac{d}{dx}(x^{-1}) + \frac{d}{dx}(1) = -cx^{-2} = -\frac{c}{x^2}$ então
$x\frac{dy}{dx} + y = x\left(-\frac{c}{x^2}\right) + \left(\frac{c}{x} = 1\right) = 1$ é uma solução da equação diferencial em qualquer intervalo que não contenha a origem. A função não é diferenciável em $x = 0$.

Em alguns casos, quando somamos duas soluções de uma equação diferencial, obtemos uma outra solução.

Exemplo:

(a) As funções $y = c_1 \cos 4x$ e $y = c_2 \operatorname{sen} 4x$, em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, são soluções para a equação diferencial

$$y'' + 16y = 0.$$

Para $y = c_1 \cos 4x$, as derivadas primeira e segunda são

$$y' = -4c_1 \operatorname{sen} 4x \text{ e } y'' = -16c_1 \cos 4x,$$

então

$$y'' + 16y = -16c_1 \cos 4x + 16(c_1 \cos 4x) = 0.$$

Analogamente, para $y = c_2 \operatorname{sen} 4x$,
$y'' + 16y = -16c_2 \operatorname{sen} 4x + 16(c_2 \operatorname{sen} 4x) = 0.$

(b) A soma das duas soluções da parte (a), $y = c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x,$ também é uma solução para $y'' + 16y = 0.$

Mais terminologia

O estudo das equações diferenciais é semelhante ao cálculo integral. Quando calculamos uma antiderivada ou integral indefinida, utilizamos uma única constante de integração. De maneira análoga, quando resolvemos uma equação diferencial de primeira ordem $F(x, y, y')$=0, normalmente obtemos uma família de curvas ou funções $G(x, y, c) = 0$, contendo um parâmetro arbitrário tal que cada membro da família é uma solução da equação diferencial. Na verdade, quando resolvemos uma equação de n-ésima ordem $F(x, y, y',...., y^{(n)}) = 0$ em que $y^{(n)}$ significa $\frac{d^n y}{dx^n}$ esperamos uma **família a n-parâmetros de soluções** $G(x, y, c_1,..., c_n) = 0$.

Uma solução para uma equação diferencial que não depende de parâmetros arbitrários é chamada de **solução particular**. Uma maneira de obter uma solução particular é escolher valores específicos para os parâmetros na família de soluções. Por exemplo, é fácil ver que $y = ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções para a equação de primeira ordem muito simples $y' = y.$

Para *c = 0,* -2 e 5, obtemos as soluções particulares $y = 0$, $y = -2e^x$ e $y = 5e^x$, respectivamente.
As vezes, uma equação diferencial possui uma solução que não pode ser obtida especificando-se os parâmetros em uma família de soluções. Tal é chamada de **solução singular.**

Equações Diferenciais De Primeira Ordem – Variáveis Separáveis

Problema de valor inicial

Estamos interessados em resolver uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sujeito à condição inicial $y(x_0) = y_0$, em que x_0 é um número no intervalo I e y_0 um número real arbitrário.

$$\text{Resolva: } \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Sujeito a : $y(x_0) = y_0$.

Tal problema é chamado de **problema de valor inicial**. Em termos geométricos, estamos procurando uma solução para a equação diferencial, definida em algum intervalo I tal que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) determinado a priori.

Vamos introduzir o método de resolução da equação de primeira ordem mais simples.
Se g(x) é uma função contínua dada, então a equação de primeira ordem $\frac{dy}{dx} = g(x)$ pode ser resolvida por integração. A solução para $\frac{dy}{dx} = g(x)$ é $y = \int g(x)dx + c$,
De maneira mais geral, uma equação diferencial da forma $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ é chamada **separável** ou tem **variáveis separáveis.** Observe que a equação separável pode ser escrita como $h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$.

É imediato que $h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$ se reduz a $\frac{dy}{dx} = g(x)$ quando h(y)=1.

Agora, se *y = f(x)* denota uma solução para , $h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$ temos $h(f(x))f'(x) = g(x)$, logo,
$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c$ mas $dy = f'(x)dx$, assim $\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c$
temos que $\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$.

Método de solução

A equação $\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$ indica o procedimento na resolução para equações diferenciais separáveis. Uma família a um parâmetro de soluções, em geral dada implicitamente, é obtida integrando ambos os lados de h(x) dy=g(x) dx.

Observação: não há necessidade de usar duas constantes na integração de uma equação separável pois,
$\int h(y)dy + c_1 = \int g(x)dx + c_2$
$\int h(x)dy = \int g(x)dx + c_2 - c_1 = \int g(x)dx + c,$ em que c é completamente arbitrária.

Exemplo:

$xe^{-y} \operatorname{sen} xdx - ydy = 0$

Solução:

Depois de multiplicar por e^y, obtemos
$x \operatorname{sen} x dx = ye^y dy.$
A integração por partes em ambos os lados da equação resulta em
$-x\cos x + \operatorname{sen} x = ye^y - e^y + c.$

CAPÍTULO 2 :EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Problema de valor inicial

Para uma equação diferencial de n-ésima ordem , o problema

$$\begin{cases} a_n(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad \textbf{(1)} \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ldots,y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

em que y_0, $y_0,\ldots,y_0^{(n-1)}$ são constantes arbitrárias, é chamado de **um problema de valor inicial .** Os valores específicos $y(x_0)= y_0, y'(x_0) = y'_0,\ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ são chamados de condições iniciais. Procuramos uma solução em algum intervalo *I* contendo x_0.

No caso de uma equação linear de segunda ordem, uma solução para o problema de valor inicial.

$a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),\quad y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y_0'$ é uma função que satisfaça a equação diferencial em *I* cujo gráfico passa pelo ponto (x_0,y_0) com inclinação inicial igual a y_0.

Teorema 2.1

> *Sejam $a_n(x)$, $a_{n-1}(x),\ldots, a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ contínuas em um intervalo I com $a_n(x) \neq 0$ para todo x neste intervalo. Se $x = x_0$ é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ para o problema de valor inicial (1) neste intervalo.*

Exemplo:

A função $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ é uma solução para o problema de valor inicial $y'' - 4y = 12x$, y(0)=4 , $y'(0) = 1$. Como a equação diferencial é linear, os coeficientes, bem como g(x)=12x, são contínuos e $a_2(x) = 1 \neq 0$ em qualquer intervalo contendo *x=0*, concluímos a partir do Teorema 2.1 que a função dada é a única solução.

Problema de valor de contorno

Um outro tipo de problema consiste em resolver uma equação diferencial de ordem dois ou maior na qual a variável dependente y ou suas derivadas são específicadas em pontos diferentes. Um problema como

Resolva: $$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Sujeita a : $y(a)=y_0,\, y(b)=y_1$
é chamado de **problema de valor de contorno.** Os valores especificado $y(a)=y_0,\, y(b)=y_1$ são chamados de **condições de contorno** ou **de fronteira.** Uma solução para o problema em questão é uma função que satisfaça a equação em algum intervalo *I*, contendo *a* e *b*, cujo gráfico passa pelos pontos (a, y_0) e (b, y_1).

Exemplo:

No intervalo $(0,\infty)$, a função $y=3x^2-6x+3$ satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno do problema de valor de contorno

$$x^2y''-2xy'+2y=6,\ \text{y(1)=0, y(0)=3.}$$

Para uma equação diferencial de segunda ordem, outras condições de contorno poderiam ser

$$y'(a)=y'_0,\, y(b)=y_1;$$
$$y(a)=y_0,\, y'(b)=y'_1;$$
$$y'(a)=y'_0,\, y'(b)=y'_1,$$

em que y_0, y_0', y_1 e y_1' denotam constantes arbitrárias. Estes três pares de condições são casos especiais das condições gerais de contorno

$$a_1y(a)+b_1y'(a)=y_1$$
$$a_2y(b)+b_2y'(b)=y_2.$$

Dependência linear e independência linear

Definição 2.1

Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ *é* ***linearmente dependente*** *em um intervalo I se existem constantes* $c_1, c_2,..., c_n$ *não todas nulas, tais que* $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+...+c_nf_n(x)=0$, *para todo x no intervalo.*

Definição 2.2

Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ ***é linearmente independente*** *em um intervalo I se ele não é linearmente dependente no intervalo.*

Em outras palavras, um conjunto de funções é linearmente independente em um intervalo se as únicas constantes para as quais

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0$ *para todo x no intervalo, são* $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

É fácil de entender essas definições no caso de duas funções $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$*. Se as funções são linearmente dependentes em um intervalo, então existem constantes* c_1 *e* c_2*, que não são ambas nulas, tais que, para todo x no intervalo,* $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$*. Portanto, se supomos* $c_1 \neq 0$*, segue-se que* $f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x)$*; isto é, se duas funções são linearmente dependentes, então uma é simplesmente múltipla da outra. Reciprocamente, se* $f_1(x) = c_2 f_2(x)$ *para alguma constante c, então* $(-1).f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ *para todo x em algum intervalo. Logo, as funções linearmente dependentes, pois pelo menos uma das constantes* $c_1 = -1$ *não é nula. Concluímos que duas funções são linearmente independentes quando nenhuma delas é múltipla da outra em um intervalo.*

Exemplo:

As funções $f_1(x) = \operatorname{sen} 2x$ e $f_2(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ são linearmente dependentes no intervalo $(-\infty, \infty)$, pois

$c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \operatorname{sen} x \cos x = 0$ é satisfeita para todo x real se $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = -1$ (lembre-se da identidade trigonométrica sem *2x = 2 sen x cos x).*

Wronskiano

O seguinte teorema proporciona condições suficiente para a independência linear de *n* funções em um intervalo. Supomos que cada função seja diferenciável pelo menos *n- 1* vezes.

Teorema 2.2

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_n \\ f_1' & f_2' & f_n \\ & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$ *for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo*

I, então as funções $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ *serão linearmente independentes no intervalo.*

Suponha que $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$*sejam diferenciáveis pelo menos n-1 vezes. Se o determinante do teorema precedente é denotado por W* $(f_1(x), f_2(x),..., f_n(x))$*e é chamado o* ***Wronskiano*** *das funções.*

Demonstração:

Provamos o teorema 2.2 por contradição no caso em que *n=2*. Suponha que $\mathrm{W}(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$ para um x_0 fixado no intervalo *I* e que, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sejam linearmente dependentes no intervalo. O fato de que as funções são linearmente dependentes significa que existem constantes c_1 e c_2, não ambas nulas, para as quais $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ para todo x em *I*. Derivando essa combinação, temos $c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0$.

Obtemos então um sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) &= 0 \qquad (2) \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) &= 0 . \end{aligned}$$

Mas a dependência linear de f_1 e f_2 implica que (2) possui uma solução não trivial cada x no intervalo. Logo $W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{vmatrix}$ =0 para todo em *I*. Isso contradiz a suposição de que $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$ Concluímos que f_1 e f_2 são linearmente independentes.

Corolário

Se $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$possuem pelo menos *n-1* derivadas e são linearmente dependentes em *I*, então que $W(f_1(x), f_2(x), f_3(n),..., f_n(x)) = 0$ para todo x no intervalo.

Exemplo:

As funções $f_1(x) = \operatorname{sen}^2 x$ e $f_2(x) = 1 - \cos 2x$ são linearmente dependentes em $(-\infty, \infty)$. (Por quê?) Pelo colorário precedente. $w(\operatorname{sen}^2 x, 1 - \cos 2x) = 0$ para todo número real. Para ver isso, fazemos o seguinte cálculo:

$$W(\operatorname{sen}^2 x, 1-\cos 2x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 x & 1-\cos 2x \\ 2\operatorname{sen} x \cos x & 2\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}$$

$$= 2\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x \cos x$$

$$+ 2\operatorname{sen} x \cos x \cos 2x$$

$$= \operatorname{sen} 2x[2\operatorname{sen}^2 x - 1 + \cos 2x]$$

$$= \operatorname{sen} 2x[2\operatorname{sen}^2 x - 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x]$$

$$= \operatorname{sen} 2x[\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 1] = 0$$

Aqui, usamos as identidades trigonométricas $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x, \cos x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ e $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$

Soluções para equações lineares

Equações Homogêneas

Uma equação diferencial de n-ésima ordem da forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

é chamada **homogênea**, enquanto

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \qquad \textbf{(4)}$$

com g(x) não identicamente nula , é chamada de **não-homogênea.**

Exemplo:

A equação $2y'' + 3y' - 5y = 0$ é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea enquanto a equação $x^3 y''' - 3xy'' + 5y' + 6y = e^x$ é uma equação diferencial ordinária linear de terceira ordem não-homogênea.

No próximo teorema, vemos que a soma, ou **superposição**, de duas ou mais soluções para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução.

Teorema 2.3

Sejam $y_1, y_2, ..., y_k$ *soluções para uma equação diferencial linear de n-ésima ordem homogênea em um intervalo I. Então, a combinação linear* $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_k y_k(x)$, *em que os* $c_i, i = 1,2,...,k$, *são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.*

Demonstração:

Provaremos o caso n=k=2. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções para $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$ Se definirmos $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, então
$a_2(x)[c_1 y'' + c_2 y''_2] + a_1(x)[c_1 y'_1 + c_2 y'_2] + a_0(x)[c_1 y_1 + c_2 y_2] =$
$c_1[a_2(x)y''_1 + a_1(x)y'_1 + a_0(x)y_1] + c_2[a_2(x)y''_2 + a_1(x)y'_2 + a_0(x)y_2] = c_1.0 + c_2.0 = 0.$

Colorários

(A) Um múltiplo $y = c_1 y_1(x)$ de uma solução $y_1(x)$ para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução.
(B) Uma equação diferencial linear homogênea sempre possui a solução trivial *y=0*

Soluções linearmente independentes

Estamos interessados em determinar quando *n* soluções $y_1, y_2, ..., y_n$ para equação a diferencial homogênea. São linearmente independentes. Surpreendentemente, o Wronskiano não nulo de um conjunto de *n* soluções em um intervalo *I* é necessário e suficiente para a independência linear.

Teorema 2.4

Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ *n soluções para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I. Então, o conjunto de soluções é* ***linearmente independente*** *em I se e somente se* $W(y_1, y_2, .., y_n) \neq 0$ *para todo x no intervalo.*

Demonstração

Provemos o teorema 2.4 no caso *n=2.* Primeiro, se $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo *x* em *I*, segue-se imediatamente o teorema 2.2 que y_1 e y_2 são linearmente independentes. Agora, devemos mostrar que, se que y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes para uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, então

$W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo x em I.Para ver isso, vamos supor que y_1 e y_2 sejam linearmente independentes e que exista um x_0 em I para o qual $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0.$ Logo, existem c_1 e c_2 não nulas tais que

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0$$

se definirmos

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$ então, $y(x)$ satisfaz também $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0.$ Mas a função identicamente nula satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais . Portanto pelo teorema 2.1, ela é a única solução. Em outras palavras, $y = 0$, ou seja, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ para todo x em I. Isso contradiz a suposição de que y_1 e y_2 são linearmente independentes no intervalo.

Conclusão, se $y_1, y_2, ..., y_n$ são n soluções para (3) em um intervalo I, o Wronskiano é identicamente nulo ou nunca se anula no intervalo.

Definição 2.3

Qualquer conjunto $y_1, y_2, ..., y_n$ de n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I é chamado de ***conjunto fundamental de soluções*** *no intervalo.*

Teorema 2.5

Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I. Então, toda solução $y(x)$ para (3) é uma combinação linear das n soluções independentes $y_1, y_2, ..., y_n$, ou seja, podemos encontrar constantes $C_1, C_2, ..., C_n$ tais que $Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x).$

Demonstração:

Provamos o caso *n = 2*. Seja Y uma solução e sejam y_1, y_2 duas soluções linearmente independentes para

$a_2(x)y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)y = 0$ em um intervalo I. Suponha que $x = t$ seja um desse intervalo para o qual $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0.$ Suponha também que os valores de $Y(t)$ e $Y'(t)$ sejam dados por $Y(t) = k_1, Y'(t) = k_2.$ Se examinamos agora o sistema de equações

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = k_1$$
$$c_1 y'_1(t) + c_2 y'_2(t) = k_2,$$

segue-se que podemos determinar C_1 e C_2 de maneira única,desde que o determinante dos coeficientes satisfaça, $\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix} \neq 0$. Mas esse determinante é simplesmente o Wronskiano calculado no ponto $x = t$ e , por hipótese, W$\neq$ 0. Definindo então a função, $G(x) = c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x)$ observamos que:

(i) G(x) satisfaz a equação diferencial, pois é a superposição de duas soluções y_1 e y_2

(ii) G*(x)* satisfaz as condições iniciais $\begin{aligned} G(t) &= C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = k_1 \\ G'(t) &= C_1y'_1(t) + C_2y'_2(t) = k_2. \end{aligned}$

(iii) *Y(x)* satisfaz a mesma equação linear e as mesmas condições iniciais.

Como a solução para esse problema linear de valor inicial é única (teorema 2.1) temos Y *(x)=G(x)* ou $Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

Teorema 2.6

Existe um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I.

Definição 2.4

Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ *n soluções linearmente independentes para a equação diferencial homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I. A solução geral para a equação no intervalo é definida por* $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x)$, *em que os* $c_i, i = 1,2,...,n$ *são constantes* arbitrárias.

Equações Não- Homogêneas

Voltamos agora nossa atenção para a definição de solução geral para uma equação linear **não-homogênea**. Qualquer função y_p, independentes de parâmetros, que satisfaça (4) é chamada de **solução particular** para a equação (algumas vezes é chamada de **integral particular**).

Exemplo:

(a) Uma solução particular para $y'' + 9y = 27$ é $y_p = 3$ pois $y''_p = 0$ e $0 + 9y_p = 9(3) = 27$.

(b) $y_p = x^3 - x$ é uma solução particular para

$x^2y'' + 2xy' - 8y = 4x^3 + 6x$ pois $y'_p = 3x^2 - 1, y_p'' = 6x,$ e

$$x^2y_p'' + 2xy_p' - 8y_p = x^2(6x) + 2x(3x^2 - 1) - 8(x^3 - x) = 4x^3 + 6x.$$

Teorema 2.7

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_k$ *soluções para uma equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3) em um intervalo I e seja* y_p *qualquer solução para a equação não-homogênea (4) no mesmo intervalo. Então,* $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + .. + c_ky_k(x) + y_p(x)$ *é também uma solução para equação não-homogênea no intervalo para quaisquer constantes* $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Podemos agora provar o análogo do teorema 2.5 para equações diferenciais não-homogêneas.

Teorema 2.8

Seja y_p *uma dada solução para equação linear não-homogênea de n-ésima ordem (4) em um intervalo I e sejam* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *um conjunto fundamental de soluções para a equação* homogênea associada (3) no intervalo. Então, para qualquer solução *Y(x)* de (4) em *I*, podemos encontrar constantes $C_1, C_2, \ldots, C_k$. tais que $Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + .. + C_ky_k(x) + y_p(x)$.

Demonstração:

Provamos o caso *n=2*. Suponha que y e y_p seja ambas soluções para $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$. Se definirmos uma função u por *u(x)=* $y(x)$ - $y_p(x)$, então $a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u$

$= a_2(x)[Y'' - y''_p] + a_1(x)[Y' - y_p'] + a_0(x)[Y - y_p]$

$= a_2(x)Y'' + a_1(x)Y' + a_0(x)Y - [a_2(x)y''_p + a_1(x)y'_p + a_0(x)y]$

=g(x) –g(x)=0. Portanto em vista da Definição 2.4 e do Teorema 2.5, podemos escrever

$$u(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$
$$Y(x) - y_p(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

ou $$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x),$$

Logo, chegamos a definição.

Definição 2.5:

Seja y_p *uma dada solução para equação diferencial linear não-homogênea de n-ésima ordem (4) em um intervalo I e seja* $y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$ *a solução geral para a equação homogênea associada (3) no intervalo. A solução geral para a equação não-homogênea no intervalo é definida por seja* $y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x)$.

Função Complementar:

Na definição 2.5, a combinação linear $y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$ que é solução geral para (3), é chamada de **função complementar** para a equação (4). Em outras palavras, a solução geral para uma equação diferencial linear não-homogênea é ***y* = função complementar + qualquer solução particular.**

Teorema 2.9:

Sejam $y_{p1}, y_{p2}, ..., y_{pk}$ *k soluções particulares para a equação diferencial linear de n-ésima ordem (4) em um intervalo I, correspondendo a k funções distintas* $g_1, g_2, ..., g_k$*.Isto é, suponha que* y_{pi} *seja uma solução particular para diferencial correspondente*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x),$$ *em que i = 1 , 2,..., k.*

Então, $y_p = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + ... + y_{pk}(x)$ *é uma solução particular para*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y$$
$$= g_1(x) + g_2(x) + ... + g_k(x).$$

Equações Lineares com Coeficientes Constantes

Já sabemos que a equação linear de primeira ordem $\frac{dy}{dx} + ay = 0$, em que *a* é uma constante, possui a solução exponencial $y = c_1 e^{-ax}$ em $(-\infty, \infty)$ portanto, é natural procurar determinar se soluções exponenciais existem em $(-\infty, \infty)$ para equações de ordem maior como $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, em que os $a_i, i = 0,1,...,n$ são constantes. Começamos considerando o caso especial da equação de segunda ordem $ay'' + by' + cy = 0$.

Equação auxiliar:

Se tentarmos uma solução da forma $y = e^{mx}$, então $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$; assim a equação $ay'' + by' + cy = 0$ torna-se $am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$ ou $e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$. Como e^{mx} nunca se anula para valores reais de x, então a única maneira de fazer essa função exponencial satisfazer a equação diferencial é escolher *m* de tal forma que ele seja raiz da equação quadrática $am^2 + bm + c = 0$.
Essa última equação é chamada de **equação auxiliar** ou **equação característica** da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Consideramos três casos, a saber: as soluções para a equação auxiliar correspondem a raízes reais distintas, raízes reais iguais e raízes complexas conjugadas.

CASO 1:

Raízes reais distintas:

Com a hipótese de que a equação auxiliar $am^2 + bm + c = 0$ possui duas raízes reais distintas m_1 e m_2, encontramos duas soluções $y_1 = e^{m_1 x}$ e $y_2 = e^{m_2 x}$.
Vimos que essas funções são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$ e portanto a solução geral para a equação diferencial é $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

CASO 2:

Raízes reais iguais:

Quando $m_1 = m_2$, obtemos somente uma solução exponencial $y_1 = e^{m_1 x}$ uma segunda solução é $y_2 = xe^{mx_1}$. A solução geral é então $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$.

CASO 3:

Raízes complexas conjugadas.

Se m_1 e m_2 são complexas, então podemos escrever $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, em que α, $\beta > 0$ são reais e $i^2 = -1$. Formalmente, não há diferença entre este caso e o caso 1, assim $y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ Porém na prática, preferimos trabalhar com funções reais em vez de exponenciais complexas. Para este fim, usamos a fórmula de Euler: $e^{i\wp} = \cos\wp + i\,\mathrm{sen}\,\wp$ em que $\wp$ é qualquer número real. Segue-se desta fórmula que $e^{ibx} = \cos bx + i\,\mathrm{sen}\,bx$ e $e^{-ibx} = \cos bx - i\,\mathrm{sen}\,bx.$ na qual usamos que $\cos(-bx) = \cos bx$ e $\mathrm{sen}(-bx) = -\mathrm{sen}\,bx.$ Note que somando e depois subtraindo as duas equações, Obtemos respectivamente, $e^{ibx} + e^{-ibx} = 2\cos bx$ e $e^{ibx} - e^{-ibx} = 2i\,\mathrm{sen}\,bx.$ Como $y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ é uma solução para $ay'' + by' + cy = 0$, para qualquer escolha das constantes c_1 e c_2, fazendo $c_1 = c_2 = 1$ e $c_1 = 1, c_2 = -1$, temos, nesta ordem, duas soluções:

$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x}$ e

$y_2 = e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}$. Mas, $y_1 = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$, e

$y_2 = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right) = 2ie^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x.$

Portanto, as funções $e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x$ são soluções para

$ay'' + by' + cy = 0.$

Temos que $W\left(e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x\right), = \beta e^{2\alpha x} \neq 0, \beta > 0,$ e daí podemos concluir que as duas funções formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial em $(-\infty, \infty)$.

Pelo princípio de superposição, a solução geral é $y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x = e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\,\mathrm{sen}\,\beta x\right).$

Exemplo 1:

(a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$

(b) $y'' - 10y' + 25y = 0$

(c) $y'' + y' + y = 0$

Solução (a)

$$2m^2 - 5m - 3 = (2m + 1)(m - 3) = 0$$

$$m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = 3$$

$$y = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{3x}.$$

Solução (b) $m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2 = 0$

$$m_1 = m_2 = 5$$
$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}.$$

Solução (c)

$$m^2 + m + 1 = 0$$
$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$
$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Equações de ordem superior:

No caso geral, para uma resolver uma equação diferencial de n-ésima ordem $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ em que os $a_i, i = 0,1,...,n,$ são constantes reais, devemos resolver uma equação polinomial de grau n $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + ... + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$. Se todas as raízes de $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + ... + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$. São reais e distintas, então a solução geral é $y = c_1 e^{m x_1} + c_2 e^{m_2 x} + ... + c_n e^{m_n x}$. É um pouco mais difícil resumir os análogos dos casos 2 e 3 porque as raízes de uma equação auxiliar de grau maior que dois podem ocorrer com várias combinações. Por exemplo, uma equação de grau cinco pode ter cinco raízes reais distintas, ou três raízes reais distintas e duas complexas, ou uma raiz real e quatro complexas, ou cinco raízes reais e iguais, ou cinco raízes reais, mas duas delas iguais etc. Quando m_1 é uma raiz de multiplicidade k de uma equação auxiliar de grau n (isto é, k raízes são iguais a m_1), pode ser mostrado que as soluções linearmente independentes são $e^{m_1 x}, xe^{m_1}, x^2 e^{m_1 x}, ..., x^{k-1} e^{m_1 x}$ e a solução geral tem que conter a combinação linear $c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + ... + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}$.
Por último, devemos lembrar que, quando os coeficientes são reais, raízes complexas de uma equação auxiliar sempre aparecem em pares conjugados. Logo, por exemplo, uma equação polinomial cúbica pode ter no máximo duas raízes complexas.

Exemplo :

$y''' + 3y'' - 4y = 0$

Solução:

por inspeção verificamos que $m^3+3m^2-4=0$ é raiz de $m_1=1$. Agora, se dividirmos $m^3+3m^2-4=0$ por *m-1*, encontramos $m^3+3m^2-4=(m-1)(m^2+4m+4)=(m-1)(m+2)^2$. Logo, as outras raízes são $m_2=m_3=-2$. A solução geral é portanto $y=c_1e^x+c_2\,e^{-2x}+c_3xe^{-2x}$.

É claro que a maior dificuldade na resolução para equação com coeficientes constantes é encontrar as raízes das equações auxiliares de grau maior que dois. Como ilustrado no exemplo, uma maneira de resolver uma equação é adivinhar uma raiz m_1. Se tivermos encontrado uma raiz m_1, então sabemos pelo **teorema de fatoração** que $m-m_1$ é um fator do polinômio. Dividindo o polinômio por $m-m_1$, obtemos a fatoração $(m-m_1)Q(m)$. Tentamos então encontrar as raízes do quociente $Q(m)$. A técnica algébrica de divisão sintética é também muito útil para encontrar raízes racionais de equação polinomiais. Especificamente, se $m_1=\dfrac{p}{q}$ é uma raiz racional (p e q inteiros primos entre si) de uma equação auxiliar $a_nm^n+...+a_1m+a_0=0$ com coeficientes inteiros, então *p* é um fator de a_0 e q é um fator de a_n. Logo, para determinar se uma equação polinomial possui raízes racionais, precisamos examinar somente as razões entre cada fator de a_0 e cada fator de a_n. Dessa maneira, construímos uma lista de todas as possíveis raízes racionais da equação. Testamos cada um desses números por divisão sintética. Se o resto é nulo, o número m_1 testado é uma raiz da equação, assim, $m-m_1$ é um fator do polinômio.

Coeficientes indeterminados – abordagem por superposição

Para obter a solução geral para uma equação diferencial linear não-homogênea temos que fazer duas coisas:

(i) Encontrar a função complementar y_c.

(ii)Encontrar qualquer solução particular y_p da equação não – homogênea.

Uma solução particular é qualquer função, independentes de parâmetros, que satisfaz a equação diferencial identicamente. A solução geral para uma equação não-homogênea em um intervalo é então $y=y_c+y_p$.

Começamos com a equação não-homogênea da forma $ay''+by'+cy=g(x)$,
em que *a*,*b e c* são constantes. Embora o método dos coeficientes indeterminados apresentado nesta seção não se limite a equação de segunda ordem, ele se limita a equação lineares não-homogêneas.

. que têm coeficientes constantes, e

. em que *g(x)* é uma constantes *k*, uma função polinomial, uma função exponencial $e^{\alpha x}$, $\text{sen}\,\beta x$, $\cos\beta x$, ou somas e produtos dessas funções.
Exemplo de tipos de funções *g(x)* que são apropriadas para essa discusão:

g (x)=10,

g(x)=$15x-6+8e^{-4x}$,

g(x)= x^2-5x,

g(x)=sen 3x – 5x cos 2x

$$g(x)=e^{x}\cos x-(3x^2-1)e^{-x}.$$

Ou seja, *g(x)* é uma combinação linear de funções do tipo k(constante), x^n, $x^n e^{\alpha x}$, $x^n e^{\alpha x}\cos\beta x$ **e** $x^n e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x$, em que *n* é um número inteiro não negativo e α e β são números reais.

O conjunto de funções que consiste em constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha x}$, senos, co-senos, tem a notável propriedade: derivadas de suas somas e produtos são ainda somas e produtos de constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha x}$, senos e co-senos. Como a combinação linear das derivadas $ay_p'' + by_p' + cy_p$ tem que ser identicamente igual a g(x), então é razoável supor que y_p tem a mesma forma que a g(x).

Exemplo 1 :

$y''+4y'-2y=2x^2-3x+6$.

Solução:
Primeiramente, resolvemos a equação homogênea associada $y''+4y'-2y=0$. Pela fórmula quadrática deduzimos que as raízes da equação auxiliar $m^2+4m-2=0$ são $m_1=-2-\sqrt{6}$ e $m_2=-2+\sqrt{6}.$ Então, a função complementar é $y_c=c_1e^{-(2+\sqrt{6})x}+c_2e^{(-2+\sqrt{6})x}$.
Agora, como a função aplicada g(x) é um polinômio quadrático, vamos supor uma solução particular que tenha a forma de um polinômio quadrático: $y_p=Ax^2+Bx+C$. Devemos determinar coeficientes específicos A, B e C para os quais y_p seja uma solução particular para $y''+4y'-2y=2x^2-3x+6$. Substituindo y_p e as derivadas $y'_p=2Ax+B$ e $y_p''=2A$ na equação diferencial $y''+4y'-2y=2x^2-3x+6$ obtemos, $y''_p+4y_p'-2y_p=2A+8Ax+4B-2Ax^2-2Bx-2C=2x^2-3x+6.$
Como a última equação é supostamente uma identidade, os coeficientes de potências iguais a *x* devem ser iguais: $-2Ax^2+(8A-2B)x+(2A+4B-2C)=2x^2-3x+6$ ou seja
-2 A = 2 , 8 A – 2 B = -3 e 2 A +4B – 2 C = 6

Resolvendo esse sistema de equação obtemos os valores A=-1, B=-5/2 e C= -9 . Logo uma solução particular é $y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$ A solução geral da equação dada é: $y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$

Exemplo 2:

Encontre uma solução particular para $y'' - y' + y = 2\operatorname{sen} 3x$.

Solução: Um palpite natural para uma solução particular seria *A sen 3x.* Mas, como derivações sucessivas de *sen 3x* produzem *sen 3x e cos 3x*, somos persuadidos a procurar uma solução particular que inclua ambos termos

$$y_p = A\cos 3x + B\operatorname{sen} 3x.$$

Derivando y_p e substituindo os resultado na equação diferencial, obtemos, depois de reagrupar,

$y''_p - y'_p + y_p = (-8A - 3B)\cos 3x + (3A - 8B)\operatorname{sen} 3x = 2\operatorname{sen} 3x$ ou

$$-8A - 3B\cos 3x + 3A - 8B\operatorname{sen} 3x = 0\cos 3x + 2\operatorname{sen} 3x$$

Do sistema resultante de equações

$$-8A - 3B = 0$$

$$3A - 8B = 2$$

obtemos $A = \frac{6}{73}$ e $B = -\frac{17}{73}$. Uma solução particular para a equação é

$$y_p = \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\operatorname{sen} 3x.$$

Como mencionamos, a forma que escolhemos para a solução particular y_p é plausível; não é uma adivinhação às cegas. Essa escolha deve levar em consideração não somente o tipo de funções que formam $g(x)$, mas também, como veremos no exemplo 4 , as funções que formam a função complementar y_c.

Exemplo 3:

Resolva $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$.

Solução:

Primeiramente, a solução para a equação homogênea associada $y'' - 2y' - 3y = 0$ é $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$.

Agora, a presença de *4x – 5* em *g(x)* sugere que a solução particular tenha um polinômio linear. Ainda, como a derivada do produto xe^{2x} e e^{2x}, supomos também que a solução

particular inclua ambas, xe^{2x} e e^{2x}. Em outras palavras, g é a soma de dois tipos de funções básicas:
$g(x) = g_1(x) + g_2(x) =$ polinomial + exponenciais.

De maneia correspondente, o princípio da superposição para equações não-homogêneas, sugere que procuremos uma solução particular

$$y_p = y_{p1} + y_{p2},$$

em que $y_{p1} = Ax + B$ e $y_{p2} = Cxe^{2x} + De^{2x}$. Substituindo,

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} De^{2x}$$

na equação e agrupando os termos, temos,

$$y''_p - 2y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3D)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}$$

Desta identidade, obtemos um sistema de quatro equações e quatro incógnitas:

$$-3A = 4$$

$$-2A - 3B = -5$$

$$-3C = 6$$

$$2C - 3D = 0.$$

Resolvendo, encontramos $A = -\frac{4}{3}, B = \frac{23}{9}, C = -2$ e $D = -\frac{4}{3}$. Conseqüentemente,

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

A solução geral para a equação é $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}.$

Em vista do princípio da superposição (teorema 2.9) , podemos também solucionar o exemplo 3, dividindo-o em dois problemas mais simples. Você deve verificar que substituindo

$y_{p1} = Ax + B$ em $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$

$y_{p2} = Cxe^{2x} + De^{2x}$ em $y'' - 2y' - 3y = 6xe^{2x}$

acarreta $y_{p1} = -\left(\frac{4}{3}\right)x + \frac{23}{9}$ e $y_{p2} = -\left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}$. Uma solução particular é portanto $y_p = y_{p1} + y_{p2}$.

O próximo exemplo mostra que algumas vezes a escolha óbvia para a forma de y_p não é a escolha correta.

Exemplo 4:

Encontre uma solução particular para $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Solução:

A derivação de e^x não produz novas funções. Logo, paresendo como antes, podemos simplesmente supor uma solução particular da forma

$$y_p = Ae^x.$$

Mas, neste caso, a substituição dessa expressão na equação diferencial conduz á afirmação contraditória

$$0 = 8e^x,$$

e, portanto, concluímos que fizemos a escolha errada para y_p.

A dificuldade aqui fica clara depois de examinarmos a função complementar $y_c = c_1e^x + c_2e^{4x}$. Observe que na escolha Ae^x já se encontra presente em y_c. Isso significa que e^x é uma solução para a equação diferencial homogênea associada e um múltiplo Ae^x quando substituído na equação diferencial necessariamente anula esta identicamente..

Qual deve ser então a forma de y_p? Veremos se podemos encontrar uma solução particular da forma

$$y_p = Axe^x.$$

Usando $y'_p = Axe^x + Ae^x$ e $y_p'' = Axe^x + 2Ae^x$, obtemos

$$y''_p - 5y'_p + 4y_p = Axe^x + 2Ae^x - 5Axe^x - 5Ae^x + 4Axe^x = 8e^x$$ ou

$-3Ae^x = 8e^x$.

Desta última equação, vemos que o valor de A é agora determinado por A=-8/3. Portanto,

$$y_p = -\frac{8}{3}xe^x$$

tem que ser uma solução particular para a equação dada.

A diferença nos procedimentos usados nos exemplos 1-3 e no exemplo 4 sugere que consideremos dois casos. O primeiro deles reflete a situação dos exemplos 1-3

Caso 1

Nenhuma função da suposta solução particular é uma solução para a equação diferencial homogênea associada.

Caso 2

Uma função na solução particular escolhida é também uma solução para a equação diferencial homogênea associada.

Exemplo 5:

Determine a forma de uma solução particular para

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5\,\text{sen}\,2x + 7xe^{6x}.$$

Solução:

Correspondendo a $3x^2$, escolhemos: $y_{p1} = Ax^2 + Bx + C$.
Correspondendo a *–5 sen 2x* escolhemos: $y_{p2} = D\cos 2x + E\,\text{sen}\,2x$.
Correspondendo a $7xe^{6x}$ escolhemos: $y_{p3} = (Fx + G)e^{6x}$.
A escolha para a solução particular é portanto
$y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} = Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\,\text{sen}\,2x + (Fx + G)e^{6x}$ Nenhum termo dessa escolha duplica um termo em $y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{7x}$.

Exemplo 6:

Encontre uma solução particular para $y'' - 2y' + y = e^x$.

Solução:

A função complementar é $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$. Como no exemplo 4, a escolha $y_p = Ae^x$ não funciona, pois é evidente a partir de y_c que e^x é uma solução para a equação homogênea associada $y'' - 2y' + y = 0$. Ainda, não seremos capazes de encontrar uma solução particular da forma $y_p = Axe^x$, pois o termo xe^x é também parte de y_c.

Tentamos então

$$y_p = Ax^2e^x.$$

Substituindo na equação diferencial dada, obtemos

$$2Ae^x = e^x \text{ e daí } A = \frac{1}{2}.$$

Logo, uma solução particular é

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^x.$$

Exemplo 7 :

Resolva o problema de valor inicial
$y'' + y = 4x + 10\,\text{sen}\,x, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 2.$

Solução: A solução da equação homogênea associada $y'' + y = 0$ é

$$y_c = c_1 \cos x + c_2\,\text{sen}\,x.$$

Agora como $g(x)$ é a soma de um polinômio linear e uma função seno, nossa escolha normal para y_p seria a soma de $y_{p1} = Ax + B$ e $y_{p2} = C\cos x + D\,\text{sen}\,x$:

$$y_p = Ax + B + C\cos x + D\,\text{sen}\,x.$$

Mas há uma óbvia duplicação dos termos *cos x* e *sen x* nesta forma escolhida e dois termos na função *c*omplemen*tar*. Essa duplicação pode ser eliminada simplesmente multiplicando y_{p2} por *x*. Por isso, tomamos

$$y_p = Ax + B + Cx\cos x + Dx\,\text{sen}\,x.$$

Derivando essa expressão e substituindo os resultados na equação diferencial, temos
$y'' + y_p = Ax + B - 2C\,\text{sen}\,x + 2D\cos x = 4x + 10\,\text{sen}\,x$, e daí,

e daí,

$$A = 4$$
$$B = 0$$
$$-2C = 10$$
$$2D = 0.$$

As soluções do sistema são imediatas: $A = 4, B = 0, C = 5$ e $D = 0$. Portanto, obtemos

$$y_p = 4x - 5x\cos x.$$

A solução geral da equação dada é

$$y = y_c + y_p = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x + 4x - 5x\cos x.$$

Agora, aplicamos as condições iniciais prescritas à solução geral para a equação.

Primeiro $y(\pi) = c_1\cos\pi + c_2\,\text{sen}\,\pi + 4\pi - 5\pi\cos\pi = 0$ implica $c_1 = 9\pi$ pois $\cos\pi = -1$ e $\text{sen}\,\pi = 0$. Prosseguindo, da derivada

$$y' = -9\pi\,\text{sen}\,x + c_2\cos x + 4 + 5x\,\text{sen}\,x - 5\cos x$$

e

$$y'(\pi) = -9\pi\,\text{sen}\,x + c_2\cos\pi + 4 + 5\pi\,\text{sen}\,\pi - 5\cos\pi = 2$$

encontramos $c_2 = 7$. A solução para o problema de valor inicial é então

$$y = 9\pi\cos x + 7\,\text{sen}\,x + 4x - 5x\cos x.$$

Exemplo 8 :

Resolva

$$y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}.$$

Solução:

A função complementar é

$$y_c = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}.$$

Uma escolha usual para uma solução particular seria

$$y_p = \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{y_{p1}} + \underbrace{De^{3x}}_{y_{p2}}.$$

Inspecionando essas funções, vemos que um termo em y_{p2} coincide com um termo de y_c. Se multiplicarmos y_{p2} por *x*, notamos que o termo xe^{3x} é ainda parte de y_c. Mas multiplicando y_{p2} por x^2, eliminando todas as duplicações. Logo, a forma eficaz de uma solução particular é

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Dx^2e^{3x}.$$

Derivando esta última forma, substituindo na equação diferencial e agrupando os termos, obtemos,

$$\begin{aligned} y''_p - 6y'_p + 9y_p &= 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2De^{3x} \\ &= 6x^2 + 2 - 12e^{3x}. \end{aligned}$$

Segue-se desta identidade que $A = \frac{2}{3}, B = \frac{8}{9}, C = \frac{2}{3}$ e $D = -6.$ logo, a solução geral $y = y_c + y_p$ é

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2e^{3x}.$$

Equações de ordem superior

O método dos coeficientes indeterminados dado aqui não é restrito a equações de segunda ordem: mas pode ser usado com equações de ordem superior

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = g(x)$$

com coeficientes constantes. Só é necessário que $g(x)$ consista nos tipos próprios de funções discutidas acima.

Exemplo 9:

Resolva $$y''' + y'' = e^x \cos x.$$

Solução:

As raízes da equação característica $m^3 + m^2 = 0$ são $m_1 = m_2 = 0$ e $m_3 = -1$.

Então, a solução complementar para a equação é $y_c = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$.
Com $g(x) = e^x \cos x$ vemos que devemos escolher

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x.$$

Como não há nenhuma função em y_p que coincide com funções da solução complementar, procedemos da maneira usual. De

$$y'''_p + y''_p = (-2A + 4B)e^x \cos x + (-4A - 2B)e^x \operatorname{sen} x = e^x \cos x \text{, obtemos}$$

$$-2A + 4B = 1$$

$$-4A - 2B = 0.$$

Desse sistema, determinamos $A = -\dfrac{1}{10}$ e $B = \dfrac{1}{5}$. Logo, uma solução particular é

$$y_p = -\frac{1}{10} e^x \cos x + \frac{1}{5} e^x \operatorname{sen} x.$$

A solução geral para a equação é

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{10} e^x \cos x + \frac{1}{5} e^x \operatorname{sen} x.$$

Exemplo 10:

Determine a forma de uma solução particular para

$$y^{(4)} + y''' = 1 - e^{-x}.$$

Solução:

Comparando a função complementar

$$y_c = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x}$$

com nossa escolha normal para uma solução particular

$$y_p = \underbrace{A}_{y_{p1}} + \underbrace{Be^{-x}}_{y_{p2}},$$

vemos que as duplicações entre y_c e y_p são eliminadas quando y_{p1} é multiplicada por x^3 e y_{p2} é multiplicada por x. Logo, a escolha correta para uma solução particular é

$$y_p = Ax^3 + Bxe^{-x}.$$

Variação de parâmetros:

Esse método é apropriado para obter uma solução particular para uma equação diferencial ordinária não-homogênea com g(x) mais geral que as apresentadas até aqui. Para desenvolver o método de resolução para uma equação de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \qquad \textbf{(5)}$$

colocamos (5) na forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad \textbf{(6)}$$

dividindo a equação por $a_2(x)$. .

Suponha que y_1 e y_2 formem um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea associada a (6), isto é,

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \qquad \text{e}$$

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0.$$

Queremos encontrar duas funções u_1 e u_2 tal que

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

seja uma solução particular para (6).

Assim, $y'_p = u_1y'_1 + u_2y'_2 + y_1u'_1y_2u'_2.$.

Supondo que $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ **(7)**

temos que $y'_p = u_1y_1' + u_2y_2'$.

Derivando novamente, temos que $y''_p = u_1y_1'' + y_1'u_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2'.$

Substituindo esses resultados em (6), obtemos

$$y_p'' + Py_p' + Qy_p = u_1\Big[\underbrace{y_1'' + Py_1' + Qy_1}_{zero}\Big] + u_2\Big[\underbrace{y_2'' + Py_2' + Qy_2}_{zero}\Big] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x).$$

Logo, u_1 e u_2 devem satisfazer $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ e

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x),$$

cuja solução pode ser expressa em termos de determinantes :

$u_1' = \dfrac{W_1}{W}$ e $u'_2 = \dfrac{W_2}{W}$,

onde

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Note que, como $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto LI, $W(x) \neq 0.$

Exemplo:

$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}.$

Como a equação auxiliar é $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$, temos $y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$. Identificando $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = xe^{2x}$,calculamos o wronskiano $w(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$. Como a equação dada está forma $y'' + p(x)y' + Q(x)y = f(x)$ (isto é , o coeficiente de y'' é 1), identificamos $f(x) = (x+1)e^{2x}$. obtemos $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = -(x+1)xe^{4x}$

$w_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x+1)e^{4x}$ e então,

temos que $u_1' = -\dfrac{(x+1)xe^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x$, $u'_2 = \dfrac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = x+1$ segue que $u_1 = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}$ e $u_2 = \dfrac{x^2}{2} + x.$ Portanto,

$$y_p = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x} = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}$$

logo, $y = y_c + y_p = \quad c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}.$

REDUÇÃO DE ORDEM

Uma das propriedades notáveis das equações lineares é que podemos simplificar (e, algumas vezes, resolve) a equação $Ly = h$, mesmo quando não temos uma base completa para o espaço solução de $Ly = 0$. A técnica, de novo, é variação de parâmetros, mas desta vez ela conduz a uma redução da ordem da equação. O seguinte exemplo servirá para introduzir o método.

Exemplo :

Consideramos a equação de segunda ordem

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x^3 \frac{dy}{dx} - 2\left(1 + x^2\right)y = x$$

no intervalo de $(0, \infty)$. Aqui, nenhuma de nossas técnicas anteriores é suficiente para obter a solução da equação homogênea associada.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x^3 \frac{dy}{dx} - 2\left(1 + x^2\right)y = 0$$

Contudo, a solução $y = x^2$ facilmente se descobre por inspeção.

Então,

$$y' = x^2 c'(x) + 2xc(x),$$
$$y'' = x^2 c''(x) + 4xc'(x) + 2c(x),$$

E produz

$$x^2\left(x^2 c'' + 4xc' + 2c\right) + x^3\left(x^2 c' + 2xc\right) - 2\left(1 + x^2\right)x^2 c = x,$$

que, após simplificação, torna-se

$$x^4 c'' + \left(4x^3 + x^5\right)c' = x.$$

ou

$$c'' + \frac{4 + x^2}{x} c' = \frac{1}{x^3}.$$

Mas poderá ser encarada como equação de primeira ordem em c', como tal, pode ser resolvida usando o ator integrante

$$e^{\int \left(4 + x^2\right)/\, x dx} = x^4 e^{x^{2/2}},$$

obtemos

$$c' = \left[k_1 + \int xe^{x^2/2}dx\right]x^{-4}e^{-x^2/2}$$
$$= \left[k_1 + e^{x^2/2}\right]x^{-4}e^{-x^2/2}$$
$$= \frac{1}{x^4} + k_1 x^{-4}e^{-x^2/2},$$

onde k_1 é uma constante arbitrária. Então,

$$c(x) = -\frac{1}{3x^3} + k_1\int x^{-4}e^{-x^2/2}dx + k_2,$$

onde k_2 é também arbitrário, e segue-se que

$$y = x^2c(x) = \frac{1}{3x^3} + k_1x^2\int x^{-4}e^{-x^2/2}dx + k_2x^2,$$

é uma solução de fato, como x^2 e $x^2\int x^{-4}e^{-x^2/2}dx$ são linearmente independentes em $c(0,\infty)$, esta expressão é, realmente, a solução geral da equação no intervalo $(0,\infty)$.

O exemplo precedente é representativo da técnica mediante a qual a ordem da equação diferencial linear pode ser reduzida de uma unidade tão logo seja conhecida uma única solução (não-trivial) de sua equação homogênea associada. Para demonstrar, de modo geral, esta afirmação, seja $Ly = h$ uma equação de ordem n e suponhamos que $u(x)$ seja uma solução não-trivial de $Ly = 0$. Então, desenvolvemos o primeiro membro da expressão $L[u(x)c(x)] = h(x)$ e obtemos:

$$(Lu)c + (L'u)c' + \frac{1}{2!}(L''u)c'' + \ldots + \frac{1}{n!}\left(L^{(n)}u\right)c(n) = h.$$

Mas, como $Lu = 0$, o primeiro termo desta equação se anula e podemos, então, encarar como uma equação linear e ordem n-1 em c'. Esta é a redução da ordem a que aludimos. Em particular, esta técnica pode ser sempre utilizada tal como o foi acima, para encontrar a solução geral de uma equação de segunda ordem, sempre que seja conhecida uma solução não-trivial de sua equação homogênea associada.

CAPITULO 3 : ALGUMAS APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Sistemas massa-mola:

Lei de hooke:

Suponha que uma mola flexível esteja suspensa verticalmente em um suporte rígido e que então uma massa. *m* seja conectada á sua extremidade livre . A distensão ou elongação da mola naturalmente dependerá da massa; Pela lei de Hooke, a mola exerce uma força restauradora *F* oposta à direção do alongamento e proporcional à distensão *s*. Enunciado da forma mais simples, *F=ks*, onde *k* é uma constante de proporcionalidade chamado de **constante da mola.** A mola é essencialmente caracterizada pelo número *k*. Por exemplo, se uma massa de *10* libras alonga em ½ pé uma mola, então *10=k(1/2)* implica que *k=20* lb/pés. Então, uma massa de, digamos, *8 lb* necessariamente estica mesma mola somente *2/5* pé.

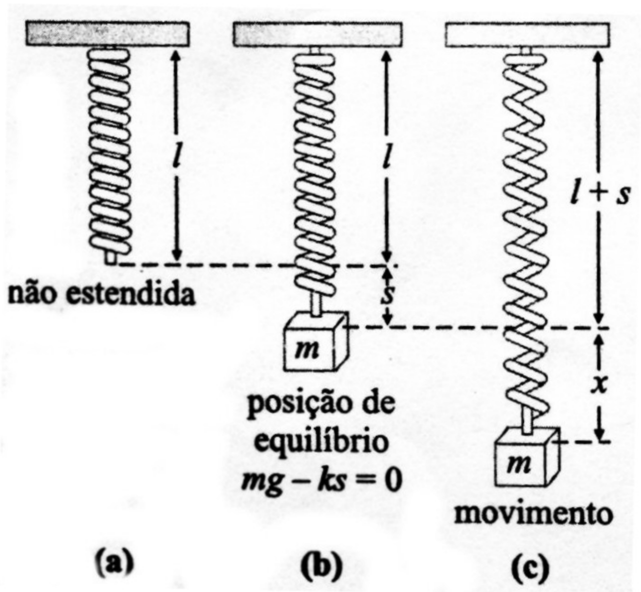


figura (1)

Segunda lei de Newton:

Depois que uma massa *m* é conectada a uma mola, provoca uma distinção *s* na mola e atinge sua posição de equilíbrio na qual seu peso *W* é igual à força restauradora *ks*. Lembre-se de que o peso é definido por *W=mg*, onde a massa é medida em slugs, quilogramas ou gramas e *g* = 32 $\frac{pés}{s^2}$, $9{,}8\frac{m}{s^2}$ ou $980\frac{cm}{s^2}$, respectivamente.

Conforme indicado na Figura 1 (b), a condição de equilíbrio é *mg=ks* ou *mg-ks=0*. Se a massa for deslocada por uma quantidade *x* de sua posição de equilíbrio, a força restauradora da mola será então *k(x + s)*. Supondo que não haja forças de retardamento sobre o sistema e supondo que a massa vibre sem a ação de outras forças externas- **movimento livre** - podemos igualar *F* com a força resultante do peso e da força restauradora:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg = -kx + mg - ks = -kx. \qquad (1)$$

O sinal negativo indica a força restauradora da mola age no sentido oposto ao do movimento. Além disso, podemos adotar a convenção de que deslocamento medidos abaixo da posição de equilíbrio são positivos.

.

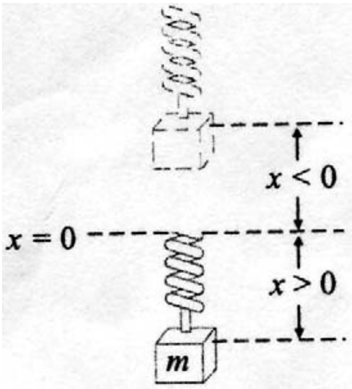


figura (2)

ED do Movimento livre Não Amortecido Dividindo (1) pela massa m obtemos a equação diferencial de segunda ordem $\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$ ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \qquad (2)$$

onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Dizemos que a equação (2) descreve um **movimento harmônico simples** ou **movimento livre não amortecido.** Duas condições iniciais óbvias associadas com (2) são $x(0) = x_0$ e $x'(0) = x_1$, representando respectivamente, o deslocamento e a velocidade iniciais da massa. Por exemplo, se $x_0 > 0, x_1 < 0,$ a massa começa de um ponto abaixo da posição de equilíbrio com uma velocidade inicial dirigida para cima. Quando $x_1 = 0,$ dizemos que ela partiu do repouso. Por exemplo, se $x_0 < 0, x_1 = 0,$ a massa partiu do repouso de um ponto $|x_0|$ unidades acima da posição de equilíbrio.

Solução e Equação do Movimento Para resolver a equação (2) observamos que as soluções da equação auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$ são números complexos $m_1 = \omega i$, $m_2 = -\omega i$. Assim, determinamos a solução geral de (2) como $x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t.$ (3)

O **período** das vibrações livres descrita por (3) é $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e a **freqüência** é $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$ Por exemplo, para *x (t)= 2 cos 3t-4 sen 3t*, o período é $\frac{2\pi}{3}$ e a freqüência é $\frac{3}{2\pi}$. O primeiro número significa que o gráfico de *x(t)* repete-se a cada $\frac{2\pi}{3}$ unidades; o segundo número significa que há três ciclos do gráfico a cada 2π unidades ou, equivalentemente, que a massa está sujeita a $\frac{3}{2\pi}$ vibrações completas por unidades de tempo. Além disso, é possível mostrar que o período

$\frac{2\pi}{\omega}$ é o intervalo de tempo entre dois máximos sucessivos de x(t) . Lembre-se de que o máximo de x(t) é um deslocamento positivo correspondente à distância máxima atingida pela massa abaixo da posição de equilíbrio, enquanto o mínimo de x(t) é um deslocamento negativo correspondente à altura máxima atingida pela massa acima da posição de equilíbrio. Vamos nos referir a cada caso como **deslocamento extremo** da massa. Finalmente, quando as condições iniciais forem usadas para determinar as constantes c_1 e c_2 em (3) diremos que a solução particular resultante ou a resposta é a **equação do movimento.**

Exemplo:

Uma massa de 2 libras distende uma mola em 6 polegadas. Em *t* = 0 , a massa é solta de um ponto 8 polegadas abaixo da posição de equilíbrio, a uma velocidade de $\frac{4}{3}$ pés/s para cima. Determine equação do movimento livre. Estamos usando o sistema de unidades da engenharia. As medidas dadas em polegadas devem ser convertidas em pés: *6pol= ½* pé; *8pol=2/3* pé. Além disso, precisamos converter as unidades de peso dadas em libras em unidades de massa. De *m=W /g,* temos *m=2/32 =1/16* slug. Além disso, da lei de Hooke, 2 = *k (1/2)* implica que a constante de mola é *k = 4 lb/pé*. Logo, (1) resulta em $\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x$ ou

$\frac{d^2x}{dt^2}+64x=0.$ O deslocamento e a velocidade iniciais são $x(0)=\frac{2}{3}, x'(0)=-\frac{4}{3}$, onde o sinal negativo na última condição é uma conseqüência do fato de que é dada à massa uma velocidade inicial na direção negativa ou para cima. Como $\omega^2=64$ ou $\omega=8$, a solução geral da equação diferencial é $x(t)=c_1\cos 8t+c_2\,\text{sen}\,8t.$ Aplicando as condições iniciais a x(t) e a $x'(t)$, obtemos $c_1=\frac{2}{3}$ e $c_2=-\frac{1}{6}$.

Assim, a equação do movimento será $x(t)=\frac{2}{3}\cos 8t-\frac{1}{6}\text{sen}\,8t.$

Forma Alternativa de x (t)

Quando $c_1\neq 0$ e $c_2\neq 0$, a **amplitude** real A da vibração livre não é óbvia com base no exame da equação (3) Por exemplo, embora a massa no tenha sido deslocada inicialmente *2/3* pé além da posição de equilíbrio, a amplitude das vibrações é um número maior que *2/3*. Assim sendo, em geral é conveniente converter uma solução da forma (3)
na forma mais simples $x(t)=A\,\text{sen}(\omega t+\phi)$, onde $A=\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}$ e ϕ é um **ângulo de fase** definido por $\left.\begin{aligned}\text{sen}\,\phi&=\frac{c_1}{A}\\ \cos\phi&=\frac{c_2}{A}\end{aligned}\right\}tg\phi=\frac{c_1}{c_2}$.

Para verificar isso, desenvolvemos

$$x(t)=A\,\text{sen}(\omega t+\phi)=$$

$A\,\text{sen}\,\omega t\cos\phi+A\cos\omega t\,\text{sen}\,\phi=(A\,\text{sen}\,\phi)\cos\omega t+(A\cos\phi)\text{sen}\,\omega t.$ Da figura 3, se ϕ for definido por $\text{sen}\,\phi=\frac{c_1}{\sqrt{c^2{}_1+c^2{}_2}}=\frac{c_1}{A}, \cos\phi=\frac{c_2}{\sqrt{c^2{}_1+c^2{}_2}}=\frac{c_2}{A}$ então temos

$$A\frac{c_1}{A}\cos\omega t+A\frac{c_2}{A}\text{sen}\,\omega t=c_1\cos\omega t+c_2\,\text{sen}\,\omega t=x(t).$$

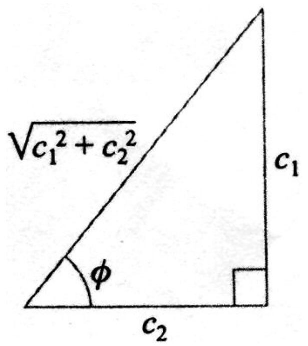
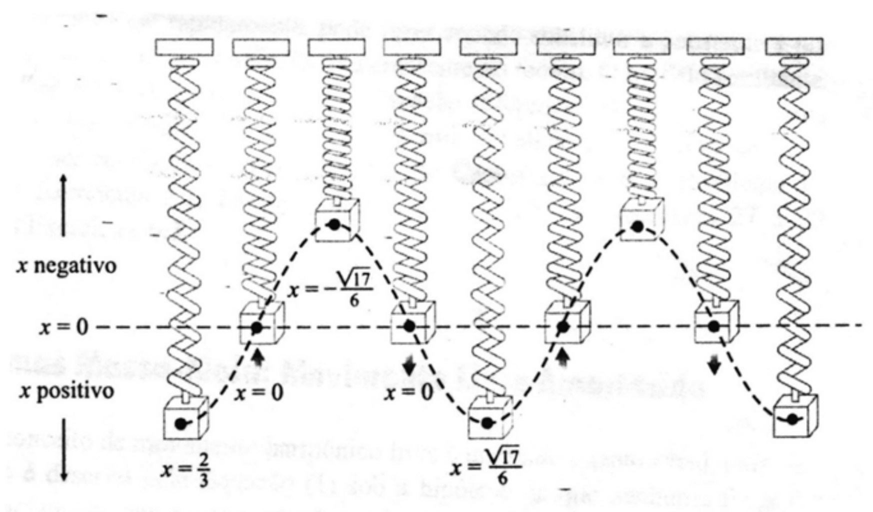


figura (3)

Em vista da discussão anterior, podemos escrever a solução $x(t)=\frac{2}{3}\cos 8t-\frac{1}{6}\operatorname{sen} 8t$. Na forma alternativa $x(t)=A\operatorname{sen}(8t+\phi)$. O cálculo da amplitude é direto, $A=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}^{\,2}=\sqrt{\frac{17}{36}}\approx 0{,}69\,\text{pé}$, mas devemos tomar algum cuidado quando calculamos o ângulo de fase ϕ.

Como $c_1=\frac{2}{3}$ e $c_2=-\frac{1}{6}$, encontramos $tg\phi=-4$, e uma calculadora nos dá então que $tg^{-1}(-4)=-1{,}326rad$. Isso não é o ângulo de fase, uma vez que $tg^{-1}(-4)$ está localizado no quarto quadrante e , portanto, contradiz o fato de que $\operatorname{sen}\phi>0$ e $\cos\phi<0$, pois $c_1>0$ e $c_2<0$.

Logo, devemos tomar ϕ como o ângulo no segundo quadrante $\phi=\pi+(-1{,}326)=1{,}816rad$. Assim, temos $x(t)=\frac{\sqrt{17}}{6}\operatorname{sen}(8t+1.816)$. O período dessa função é $T=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$.



(a)

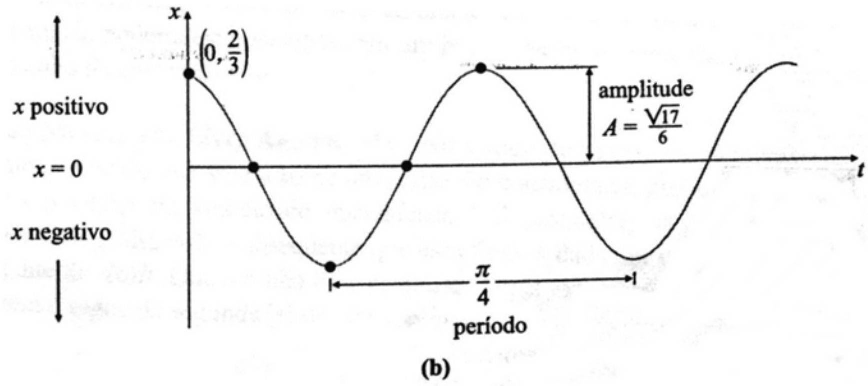


figura (4)

A figura 4 (a) ilustra a massa do exemplo 2 passando aproximadamente por dois ciclos de movimento. Lendo da esquerda para direita, as cincos primeiras posições (marcadas por pontos pretos) correspondem à posição inicial da massa abaixo da posição de equilíbrio *(x =2/3)*, da massa passando pela posição de equilíbrio pela primeira vez e indo para cima (*x = 0*), da massa em seu deslocamento extremo acima da posição de equilíbrio $\left(x = -\sqrt{\frac{17}{6}}\right)$, da massa na posição de equilíbrio pela segunda vez e indo para baixo *(x = 0)* e da massa em seu deslocamento extremo abaixo da posição de equilíbrio $\left(x = \frac{\sqrt{17}}{6}\right)$. Os pontinhos pretos sobre o gráfico de $x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6}\operatorname{sen}(8t + 1.816)$. dados na figura 4 (b), também estão de acordo com as cincos posições que acabamos de apresentar. Observe, porém,que na figura 4 (b) o sentido no eixo é a direção usual para cima e, portanto, é o oposto ao sentido indicado na figura 4 (a).
A forma alternativa dada em $x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, é muito útil uma vez que permite encontrar facilmente os valores do tempo para os quais o gráfico de *x(t)* cruza a parte positiva do eixo *t* (a reta *x=0)* . O bservamos que $\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = 0$, quando $\omega t + \phi = n\pi$, onde n é um número não negativo.

Sistemas com constantes de elasticidade Variáveis No modelo discutido anteriormente, estamos supondo um mundo ideal, no qual as características físicas da mola não mudam com o tempo. Em um mundo não ideal, porém, é razoável esperar que, quando um sistema massa-mola estiver em movimento por um longo período, a mola enfraquecerá; em outras palavras, a constante de elasticidade da mola variára ou, mais explicitamente, decairá com o tempo. Em um modelo para o **envelhecimento da mola** a constante de elasticidade *k* em é substituída por uma função decrescente $k(t) = ke^{-\alpha t}, k > 0, \alpha > 0$. A equação não linear $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$ não pode ser resolvida por nenhum dos métodos considerados anteriormente.

Movimento Livre Amortecido

O conceito de movimento harmônico livre é um tanto irreal, uma vez que é descrito pela equação (1) sob a hipótese que nenhuma força de retardamento age sobre a massa em movimento. A não ser que a massa seja suspensa em um vácuo perfeito, haverá pelo menos uma força contrária ao movimento em decorrência do meio ambiente. A massa poderia estar suspensa em meio viscoso ou conectada a um dispositivo de amortecimento.

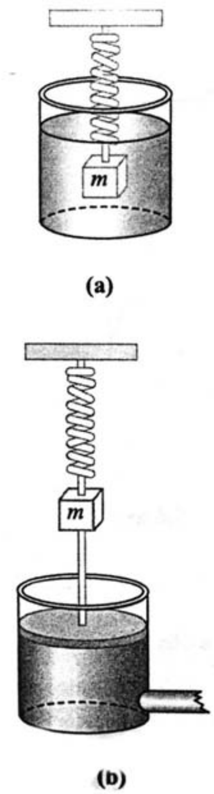


figura (5)

ED do Movimento Livre Amortecido:

No estudo de mecânica, as forças de amortecimento que atuam sobre um corpo são consideradas proporcionais a uma potência da velocidade instatânea. Em particular, vamos supor durante toda a discussão subseqüente que a força é dada por um múltiplo constante de *dx/dt*. Quando não houver outras forças externas agindo sobre o sistema, segue da segunda lei de Newton que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}, \qquad (4)$$

onde β é positivo e chamado de constante de amortecimento e o sinal negativo é uma conseqüência do fato de que a força amortecedora age no sentido oposto ao do movimento.
Dividindo-se (4) pela massa *m*, obtemos a equação diferencial do **movimento livre amortecido** $\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$ ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \qquad (5)$$

onde $2\lambda = \frac{\beta}{m}, \omega^2 = \frac{k}{m}$. O símbolo 2λ foi usado somente por conveniência algébrica, pois a equação auxiliar é $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ e as raízes correspondentes são portanto, $m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$.
Podemos agora distinguir três casos possíveis, dependendo do sinal algébrico de $\lambda^2 - \omega^2$. Como cada solução contém o fator de amortecimento $e^{-\lambda t}, \lambda > 0$,o deslocamento da massa fica desprezível após um longo período.
Caso I : $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ Nessa situação, dizemos que o sistema é **super-amortecido,** pois o coeficiente de amortecimento β é grande quando comparado com a constante da mola *k*. A solução correspondente de (5) é $x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$ ou $x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} + c_2e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}\right)$.
Essa equação representa um movimento suave e não oscilatório. A figura 6 representa dois gráficos possíveis para *x(t)*

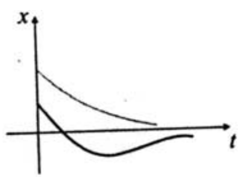


figura (6)

Caso II: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ Dizemos então que o sistema é **criticamente amortecido,** pois qualquer decréscimo na força de amortecimento resulta em um movimento oscilatório. A solução geral de (5) é $x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2te^{m_1t}$ ou $x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2t)$. Observe que o movimento é bem

semelhante ao sistema superamortecido. É também evidente de $x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t)$ que a massa pode passar pela posição de equilíbrio no máximo uma vez.
Alguns gráficos típicos desse movimento são apresentados na figura 7.

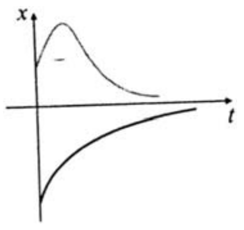


figura (7)

Caso III:

$\lambda^2 - \omega^2 < 0$ Nesse caso, dizemos que o sistema é subamortecido, pois o coeficiente de amortecimento é pequeno quando comparado com a constante da mola. As raízes m_1 e m_2 agora são complexas: $m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} i,$ $m_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} i.$ Assim sendo, a solução geral da equação (5) é

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t.\right) \qquad \textbf{(6)}$$

O movimento descrito por (6) é oscilatório; mas, por causa do fator $e^{-\lambda t}$, as amplitudes de vibração $\to 0$ quando t $\to \infty$, conforme podemos ver na figura 8.

figura (8)

Movimento Forçado

ED do Movimento Forçado com Amortecimento:

Consideramos agora uma força externa *f(t)* agindo sobre uma massa vibrante em uma mola. Por exemplo, *f(t)* pode representar uma força que gera um movimento oscilatório vertical do suporte da mola. Veja na figura 9.

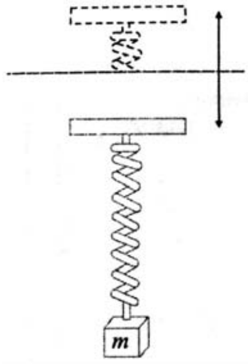


figura (9)

A inclusão de *f(t)* na formulação da segunda lei de Newton resulta na equação diferencial do **movimento forçado** ou **induzido**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t). \qquad \textbf{(7)}$$

Dividindo por *m*, obtemos $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t)$, **(8)**

onde F(t)= $\frac{f(t)}{m}$. Como antes $2\lambda = \frac{\beta}{m}, \omega^2 = \frac{k}{m}$. Para resolver essa última equação não homogênea, podemos usar tanto o método dos coeficientes a determinar quanto o de variação dos parâmetros.

Termos Transientes (Transitórios) e Estacionários:

Se F for uma função periódica, tal como $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \gamma t$ ou $F(t) = F_0 \cos \gamma t$, a solução geral de (8) para $\lambda > 0$ é a soma de uma função não periódica $x_c(t)$ e uma função periódica $x_p(t)$.

Além disso, $x_c(t)$ torna-se desprezível à medida que o tempo decorre, isto é, $\lim_{t\to\infty} x_c(t) = 0$. Assim sendo, para grandes valores do tempo, o movimento da massa é aproximado bem perto pela solução particular $x_p(t)$.

A função complementar $x_c(t)$ é chamada então de **termo transiente** ou **solução transiente** e a função $x_p(t)$, a parte da solução que permanece após um intervalo de tempo, é chamada de **termo estacionário** ou **solução estacionária.**

Exemplo:

A solução do problema de valor inicial

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 4\cos t + 2\,\text{sen}\, t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = x_1$, onde x_1 é constante, é

dada por $x(t) = \underbrace{(x_1 - 2)e^{-t}\,\text{sen}\, t}_{transiente} + \underbrace{2\,\text{sen}\, t}_{estacionário}$.

Os gráficos da figura 10 mostram que a influência do termo transiente é desprezível para $t > \frac{3\pi}{2}$.

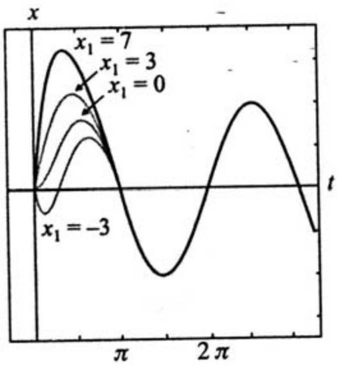


figura (10)

CONCLUSÃO

O trabalho que aqui se conclui exigiu uma série de conhecimento, de caráter diverso, para que os objetivos fossem alcançados. Não há dúvidas de que aprendi muito, tanto no que diz respeito ao conhecimento matemático das equações diferenciais ordinárias e suas aplicações na física.

Alguns tipos de equações bem como, equações lineares homogêneas e não-homogêneas, esta por sua vez com 3 diferentes métodos de resolução apenas apresentados com coeficientes indeterminados – abordagem por superposição, onde encontramos a função complementar y_c e encontrar qualquer solução particular y_p, outro método é por variação de parâmetros que é mais apropriado para se resolver este tipo de equação.

Ao término deste trabalho, é fundamental ainda que se façam algumas considerações, baseadas nas dificuldades enfrentadas, que possam auxiliar futuros trabalhos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 ZILL, Dennis G. Equações Diferenciais Com Aplicações Em Modelagem, Pioneira Thomson Learning, 2003.

2 Boyce, W. E e & Diprima R. C, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Editora LTC, 2002